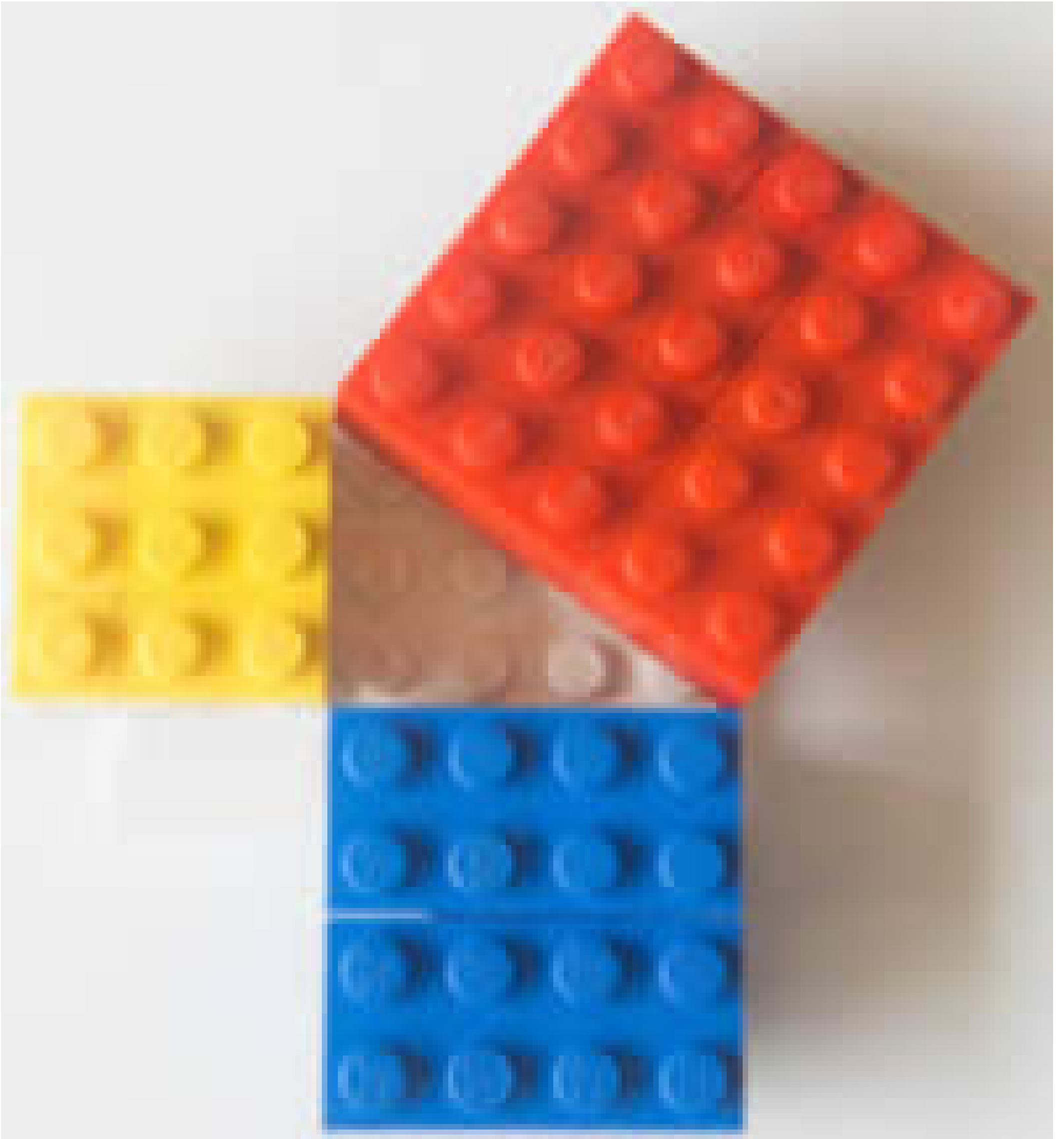
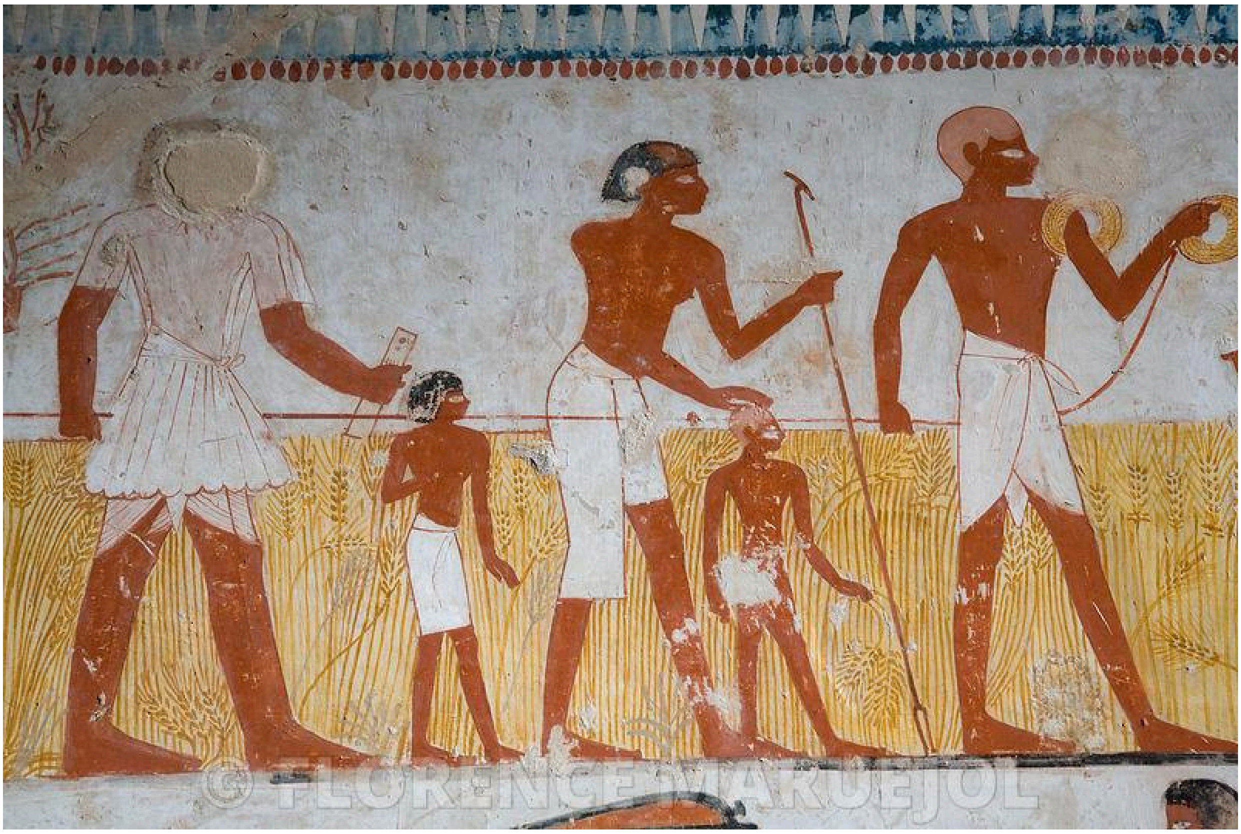
Pythagore

son Théorème et sa réciproque



Le Théorème de Pythagore est un incontournable dans le parcours mathématique d'un collégien. Bien plus qu'un énoncé à apprendre par cœur, ce théorème est précieux autant qu'il est remarquable. Découvrons le avec une simple corde et laissons le nous mener vers d'autres connaissances, au croisement de la géométrie et des nombres.

1. Une corde, *dans le désert Égyptien*



Les scribes arpenteurs mesurent les champs à l'aide d'une corde avant la récolte. Tombe de Menna (TT 69), à Cheikh abd el-Gournah, Nouvel Empire, XVIIIe dynastie, vers 1400 av. J.-C.

Dans le désert égyptien, les scribes arpenteurs utilisaient une corde à noeuds, espacés régulièrement.

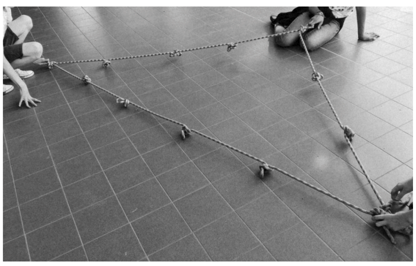
Q1. Que faire avec une telle corde et quelques piquets ?

- *mesurer, reporter, comparer.*
- *tirer une droite au cordeau.*
- *tracer un arc de cercle,*

définissant un lieu de points situés à équidistance d'un centre.

La légende raconte qu'ils étaient capables de tracer précisément des angles droits avec une corde à 13 nœuds espacés régulièrement.

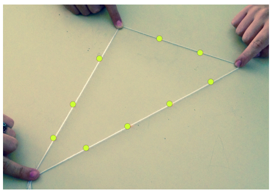
Q2. Comment faire un angle droit à la corde ?



- *On tend la corde aux nœuds n°4, n°8 et n°13.*
- *On rejoint le premier nœud avec le dernier.*
- *Un triangle rectangle apparaît.*
- *Ses côtés mesurent respectivement 3, 4 et 5 unités de longueur.*

2. Une découverte, *universelle*

La corde à 13 nœuds permet donc de réaliser précisément un triangle rectangle.



C'est le triangle égyptien 3/4/5.

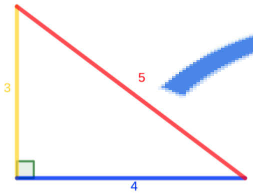
Q3. Existe-t-il d'autres triangles égyptiens ?

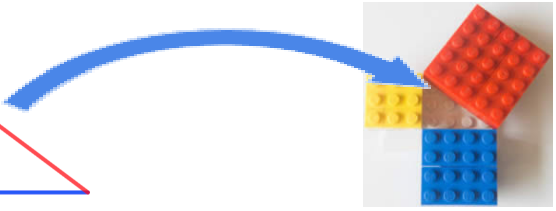
- *Prenons des multiples des côtés 3/4/5 :   6/8/10   12/16/20   21/28/35 . . .*
- *Cela revient à agrandir le triangle 3/4/5 de manière proportionnelle. Ainsi, ses angles sont conservés, en particulier l'angle droit. On dit que l'on a des triangles rectangles semblables entre eux.*

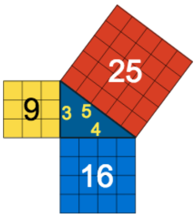
Q4. En existe-t-il des non semblables ?

- *Une tablette d'argile Babylonienne datant de - 1800 contient une série de 15 triplets de nombres, formant des triangles égyptiens non semblables.*
- *En voici quelques uns :*
  3/4/5   5/12/13   8/15/17   7/24/25   9/40/41

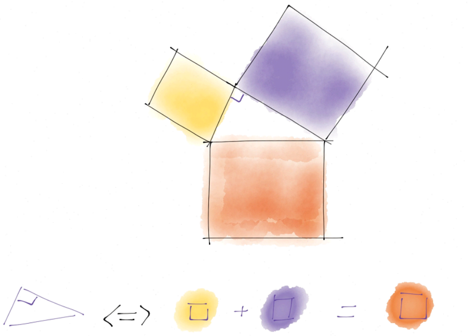
Q5. Comment reconnaître des triangles égyptiens ?







- *La solution réside dans les aires des trois carrés construits sur les côtés du triangle.*
- *Si un triangle est rectangle alors l'aire du grand carré est égale à la somme des aires des deux autres carrés, et réciproquement.*



Voici la version géométrique du **théorème de Pythagore et de sa réciproque.** Ces nombreux triplets formant des triangles rectangles sont dits pythagoriciens.

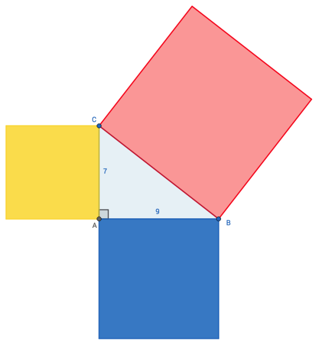
3. Du carré au nombre, *irrationnel*

La connaissance du théorème de Pythagore ouvre des nouvelles possibilités de calcul, en particulier dans la recherche d'un côté d'un triangle rectangle, connaissant ses deux autres côtés.

Q6. Quelle est la mesure de l'hypoténuse d'un triangle ?

Le triangle ABC est rectangle en A et :

AB = 9 cm
AC = 7 cm



Je peux donc appliquer ***le théorème de Pythagore.***

L'aire du carré rouge vaut la somme des aires jaunes et bleues, soit :

$$7 \times 7 + 9 \times 9 = 130\ \text{cm}^2$$

Quelle est donc la mesure du côté du carré rouge ?

Encadrons 130 par deux aires connues.

$11 \times 11 = 121$; $12 \times 12 = 144$ et $121 < 130 < 144$

Donc : ***11 cm < BC < 12 cm***

Précisons :

$11{,}4 \times 11{,}4 = 129{,}96$; $11{,}5 \times 11{,}5 = 132{,}25$
et $129{,}96 < 130 < 132{,}23$

Donc : ***11,4 cm < BC < 12,5 cm***

En poursuivant ainsi, on peut obtenir :

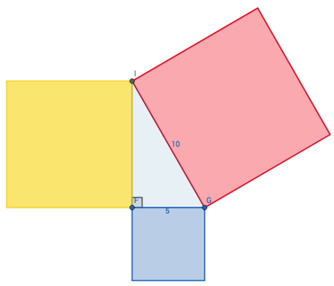
BC ≈ 11,40175 cm.

On dit que les nombres 121 et 144 sont des carrés parfaits et on note :
$121 = 11^2$, prononcé "11 au carré" et $144 = 12^2$, prononcé "12 au carré".

Q7. Comment la calculatrice facilite les calculs ?

Le triangle IFG est rectangle en F et :

FG = 5 cm
IG = 10 cm



Je peux donc appliquer ***le théorème de Pythagore.***

L'aire du carré rouge vaut la somme des aires jaunes et bleues.
Donc l'aire du carré jaune vaut :

$$10 \times 10 - 5 \times 5 = 10^2 - 5^2 = 75\ \text{cm}^2$$

Quelle est donc la mesure du côté du carré jaune ?

$8^2 = 64$; $9^2 = 81$ et $64 < 75 < 81$

Donc : ***8 cm < FI < 9 cm***

La touche √ de la calculatrice permet de réaliser automatiquement ce travail d'encadrement.

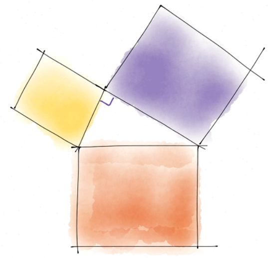
On obtient :

$$IF = \sqrt{75} \approx 8{,}660254037\ \text{cm}$$

que l'on prononce :
"racine carrée de 75".

4. En résumé, *ce qu'il faut savoir*

Le théorème de Pythagore est une règle mathématique remarquable qui a fait l'objet de nombreuses preuves.



Il repose sur les trois carrés d'un triangle et permet soit d'identifier exactement un triangle rectangle ou non, soit de déterminer précisément la mesure d'un des côtés, connaissant les deux autres.

Grâce au théorème de Pythagore, nous gagnons en précision et en exactitude et nous découvrons des segments qui ne peuvent être mesurés avec des nombres entiers, décimaux ou fractionnaires. Ils nécessitent des nouveaux nombres … au delà de la raison. Les irrationnels.

Une découverte précieuse !

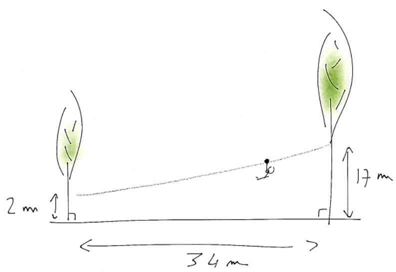
5. En application, *ce qu'il faut savoir faire*

- *Pour vérifier que deux montants d'une huisserie sont perpendiculaires, le menuisier trace deux traits : l'un à 30 cm du coin, l'autre à 40 cm. Il mesure alors la distance entre ces deux traits : « 0,50 m, c'est d'équerre ! » déclare l'artisan.*

A-t-il raison ?
Pourquoi ?

- *Mon coffre-fort mesure 60 cm de profondeur, 57 cm de large et 93 cm de haut.*

Puis-je y mettre un tableau de 105 cm sur 50 cm ? Justifier.



- *Je souhaite tendre une tyrolienne entre deux arbres.*

Quelle doit être la longueur du câble ?
Détailler chaque étape du raisonnement.